###### Игра 22

Пусть дана игра со следующей платежной матрицей:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bj  Ai | B1 | B2 |
| A1 | *a*11 | *a*12 |
| A2 | *a*21 | *a*22 |

Могут встретиться здесь 2 случая:

1. имеется седловая точка;
2. не имеется седловой точки.

*В первом случае* решение очевидно – это пара стратегий, пересекающихся в седловой точке. Нетрудно доказать, что если игра 2 2 имеет седловую точку, то в этой игре какая-нибудь из стратегий может быть отброшена как заведомо невыгодная или дублирующая (можно доказать на ряде примеров).

*Во втором случае*    . Решение должно быть в смешанных

стратегиях. Найдём это решение, то есть пару оптимальных стратегий

*S*\*  ( *p* , *p* ); *S*\*  (*q* ,*q* ) .

Сначала найдём

*A* 1 2

*S*\* .

*A*

*B* 1 2

Согласно теореме об активных стратегиях, если игрок *A* будет

придерживаться *S*\* , то независимо от образа действий игрока *B* (если он не

*A*

выходит за пределы своих активных стратегий), выигрыш будет оставаться

равным цене игры  . В бы седловая точка).

*U* 2  2

обе стратегии

*B*1 и *B*2

* активны (иначе была

Значить, при

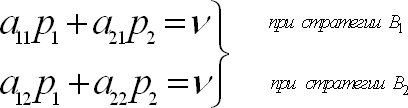
*S*\*  ( *p* , *p* )

противник может, не меняя выигрыша,

*A* 1 2

применять любую из своих чистых стратегий.

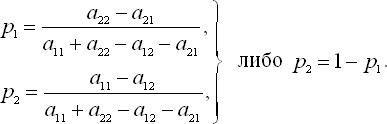
Поэтому имеем

(6.1)

Так как

*p*1  *p*2  1 , то получим

(6.2)

Цену  найдем из (6.1), подставляя

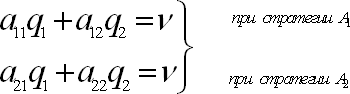
*p*1 и

*p*2 в любое уравнение:

(6.3)

Аналогично находится и *S*\* :

*B*

(6.4)

откуда

*q*  *a*22  *a*11 ,

1 *a*  *a*  *a*  *a*

11 22 12 21

*q*2  1 *q*1

**Пример 1.** Игра «Поиск»( 2 2)

(\*\*’)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bj  Ai | B1 | B2 |
| A1 | 1 | 1 |
| A2 | 1 | 1 |

  1;  1;   

Ищем решение в смешанных стратегиях. По формулам (6.2), (6.3) и (6.5) получаем:

*p*  1 ; *p*  1 ;  0; *q*  1 ;*q*  1 ;

1 2 2 2 1 2 2 2

*S*\*   1 1  \*  1 1 

*S* 

*A*  ; ; *B*  ;  .

 2 2   2 2 

Следовательно, оптимальная стратегия каждого игрока состоит в

чередовании с вероятностью 1

2

чистых стратегий; при этом средний

выигрыш равен   0 .

**Пример 2**. Игра «Два бомбардировщика и истребитель».

Сторона А посылает к противнику два бомбардировщика I и II (I- впереди; II-сзади). Один из бомбардировщиков (не известно какой) несёт бомбу; второй – сопровождает. В районе противника бомбардировщиков встречает истребитель – сторона *B* . Бомбардировщики вооружены пушками. Если истребитель атакует задний бомбардировщик (т.е. II), то по нему ведут огонь пушки только этого бомбардировщика, поражающего истребитель с вероятностью 0,3. Если истребитель атакует бомбардировщик I, то огонь по истребителю ведут пушки как I-го, так и II-го бомбардировщика и совместно они поражают истребитель с вероятностью 0,51. Если истребитель не сбит, то поражает выбранную цель с вероятностью

0,8.

Задача бомбардировщиков – донести бомбу до цели; Задача истребителя – воспротивиться этому.

Требуется найти *оптимальные стратегии* игроков (сторон):

* + для А - *какой бомбардировщик сделать носителем*?
  + для В - *какой бомбардировщик атаковать*?

Примем для стороны А – выигрыш – *вероятность не поражения носителя* ( *aij* ).

Найдём средние выигрыши для комбинаций стратегий.

1. *A*1*B*1

* носитель I, атакуется I

*a*11  0,51 (1 0,51)(1 0,8)  0,608.

1. *A*2 *B*1 - носитель II, атакуется I

*a*  1

21

1. *A*1 *B*2

* носитель I, атакуется II

*a*12 1

4. *A*2 *B*2  0,3  (1 0,3)(1 0,8)  0,3  0,7  0,2  0,44.

Платёжная матрица

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Bj  Ai | B1 | B2 | 3 |
| A1 | 0,608 | 1 | 0,608 |
| A2 | 1 | 0,44 | 0,44 |
| 3 | 1 | 1 |  |

  0,608;   1;    - игра не имеет седловой точки. Решение – в смешанных стратегиях;

*S*\*  ( *p*\*, *p*\* )  ?

*A* 1 2

*S*\*  (*q*\*, *q*\* )  ?

*B* 1 2

В соответствии с приведёнными для И 22 формулами (6.2), (6.3) и (6.5) находим:

*p*  0,588; *p*  0,412;

  0,708

1 2

*q*1  0,588; *q*2  0,412,

то есть  .

Таким образом оптимальная стратегия стороны А состоит в том, чтобы в

58,8% всех случаев (с

*p*  0,588) делать носителем бомбардировщик I, а в

41,2% случаев бомбардировщик II. Аналогично, противник с вероятностью

0,588 атаковать первый бомбардировщик, а с вероятностью 0,412 - второй. При этом сторона А будет выполнять свою задачу – доносить бомбы до цели

– с вероятностью 0,768 , что больше, чем нижняя цена игры

  0,608 и

меньше, чем верхняя цена

 1.

###### Геометрическая интерпретация игры 2 2.

Решению игры 2 2

можно дать удобную геометрическую

интерпретацию. Пусть имеется игра 2 2 с платежной матрицей:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bj  Ai | B1 | B2 |
| A1 | *a*11 | *a*12 |
| A2 | *a*21 | *a*22 |

Возьмём участок оси абсцисс длиной единица (см. ниже рис. I). Левый конец участка (точка с абсциссой *x*=0) будет изображать стратегию А1, а правый конец участка (точка с абсциссой *x*=1) будет соответствовать чистой стратегии А2; все промежуточные точки участка будут изображать смешанные стратегии игрока А, причем вероятность Р1 стратегии А1 будет равна расстоянию от точки *SA* до правого конца участка, а вероятность Р2 стратегии А2 – расстоянию до левого конца. Через точки А1 и А2 проведем два перпендикуляра к оси абсцисс: ось I-I и ось II-II. На оси I-I будем откладывать выигрыш при стратегии А1, а на оси II-II выигрыши при стратегии А2.

I II

B2 B1

N

В1

a11

A1

0

a12

p



\*

*S*

*A*

SA p

В2 22 A2

x

a

a21

Рис. I.

I 2 1 II

Прямую Прямую

*B*1*B*1  условно будем называть «стратегией

*B*2 *B*2  условно будем называть «стратегией

*B*1 »

*B*2 »

*B*1*NB*2  *нижняя граница* выигрыша для игрока А при стратегиях

*B*1 , *B*2

(на

этой границе лежит минимальный выигрыш для А при любой

*SA* ).

Согласно принципа *максимина* точка *N* - max на

*B*1 *NB*2

определяет

*решение* и *цену*  ,

то есть

*S*\* . На рис. II *S*\*  *A*

(чистая стратегия), хотя это и

*A A* 2

не соответствует точке пересечения стратегий.

B1

B2   *a*

0

I p2

B2 B1

\* =A2

21

*S*

*A*

1 x II

Рис. II.

B2 B1

0 *S*\*

*A*

I

  *a*

=A1 p1

11

B2 B1

Рис. III.

1 x II

Рис. III соответствует случаю, когда у игрока В имеется заведомо

невыгодная стратегия

*B*2 .

Геометрическая интерпретация даёт возможность наглядно изобразить и цены  и  (рис IV):

Рис. IV.

*B*2 *I*

*II*

*B*1

*K*

*N*

*L*

*B*

*B*

2

1







0

*P*

*S* \*

*A*

1

2

*P*

1

*I II*

для

2

*S* \*  *q* , *q*

, *q* 

*KB*2

или *q* 

*LB*2 .

2

*B* 1 2

1 *KB*

* *KB*1

1 *LB*

* *LB*1

Для нахождения

\* можно и по-

*S*

*B*

другому: поменять местами игроков *A* и *B* , найти верхнюю границу выигрыша и на ней найти minimum (см. рис. V).

*A*2 *I*

*II*

*A*1

*N*

*a*21

*A*

*A*2

1



*a*11

*a*22

0

*q*2

*S* \*

*A*

*q*

1

1

*A NA* -верхняя граница выигрыша

2 1

игрока *A* . *N* - min верхней границы и есть решение, откуда получается и  .

*I II*

Рис. V.